Title	完全正則空間の Bicompactification
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(8) p.243-p.244
Issue Date	1948-03-10
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75217
rights	
Note	

82. 完全正則空間の Bicompactification

阪大　小松　醇郎　(1948.II.7)

R を Completely regular な空間とするとき R を含む bicompact な空間 R^* で $\overline{R}=R^*$ なるものを作る，その方法は Wallman の R^* と Čech の $\beta(R)$ とがあり周知の様に R^* は T_1 空間で，$\beta(R)$ は normal である。R^* と $\beta(R)$ との間には次の関係が成立する。

定理1　R^* から $\beta(R)$ の上へ，R の点を invariant に保つ様な連続写像 φ が存在する。

此の定理は位相幾何学講義 95P 定理5に述べたものではありますがゴタゴタして分り難いので改訂します。尚ほ此の定理は次の証明に依らずに他の長田潤一氏の定理，即ち

定理　T_1 空間 R で定義された任意の有界実函数 f は Wallman の bicompactification R^* に連続拡張出来る。

を使へば簡単に導かれる。長田氏の定理は何れ発表されると思ふが此処では直接の証明を述べる。

R^* の一点 $\mathfrak{F}=\{M_\lambda|\lambda\}$ に対し $\beta(R)$ で $\{\overline{M_\lambda}|\lambda\}$ から作られる極大フィルターの収束点を対応させる。$\{\overline{M_\lambda}\}$ から作らる極大フィルターは一意に定まるから此の対応 φ は一意に定まる。且 $\varphi(R)\equiv R$ である。

1) $\varphi(R^*)=\beta(R)$ である。$a\in\beta(R)-R$ に対し $\overline{R}=\beta(R)$ から R の有向点集合 $\psi(\xi|\Xi)\to a$ なるもの存在する。ψ から導かれたフィルター $\mathfrak{F}_\psi\to a$ である。$\mathfrak{F}_\psi$ を含む R の閉集合に依る極大フィルター $\mathfrak{F}$ を作れば $\varphi(\mathfrak{F})=a$ である。何となれば $\mathfrak{F}\supset\mathfrak{F}_\psi$ であるから $\mathfrak{F}\to a$ 従つて $\mathfrak{F}=\{M_\lambda|\lambda\}$ とすれば $\overline{M_\lambda}\ni a$ である。

2) φ の連続のために R^* での完全有向点集合 $\psi(\eta|H)$ をとり $\psi\to a^*$ (in R^*) だとする。$\psi(\eta)\in R$ とすれば ψ から導かれた R に於ける閉極大フィルター $\mathfrak{F}_\psi=\{M_\lambda|\lambda\}$ は実は a^* と一致するフィルターである。何となれば若し $\mathfrak{F}'=\{F_\mu|\mu\}=a^*$ で $\mathfrak{F}_\psi\neq\mathfrak{F}'$ とすれば或る λ,μ で $M_\lambda\cap F_\mu=\phi$，従つて R^* での topology

で $\overline{M_z} \ni x^*$ $\overline{P_y} \to a^*$ に矛盾する。従って $\varphi\mathfrak{F}_\varphi \to f(a^*)$，故に $\varphi\{ \to$ $\varphi(a^*)$ である。

3) $\varphi(y)$ を R の上で連続であることを証明するために R の閉集合 M に対し，$\beta(R)$ の開集合 G で $G \cap R = M$，$\overline{G} = \overline{M}$ なる G をとる。G は $R - M = M'_R$ と一致するとき $\beta(R) - \overline{M_R} = G$ である。さて a^* の任意の基の閉集合 $M_z \subset R$ で $\varphi(y)$ は連続である。今基 M_z 閉集合の一点 b^* とすれば $\varphi(b^*) \in \overline{G_z}$。何となれば R^* で $b^* = \{M_i | x\}$ とすれば $(\forall i)$ $M_z \cap M_i \neq \phi$ で且つ $\overline{M_i} \ni \varphi(b^*)$ である。従って $\{\overline{M_i}\}$ から作られる $\beta(R)$ での極大フィルターは $\overline{M_z}$ を，従って $\overline{G_z}$ を含む。故に $\overline{G_z} \ni \varphi(b^*)$ 故に又 $\overline{G_z} \ni \varphi(a^*)$。

次に a^* の凡ての基閉集合 M_z をとれば $\cap\overline{G_z} = \varphi(a^*)$ である。何となれば $\varphi(b^*) \neq \varphi(a^*)$ で $\varphi(b^*) \in \cap\overline{G_z}$ とすれば $\beta(R)$ の開集合 G_1, G_2 で $G_1 \ni \varphi(b^*)$，$G_2 \ni \varphi(a^*)$，$\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \phi$ なる G_1, G_2 がとれる。今 $b^* = \{M_i | x\}$ とすれば $\{\overline{M_i} | x\} \to f(b^*)$ から $(\forall i)$ $M_i \cap G_1 \neq \phi$，$M_i \subset R$ から $M_i \cap G_1 \cap R \neq \phi$ である。故に b^* は R^* で基 $G_1 \cap R$ 閉集合の点である。同様に a^* は R^* で基 $G_2 \cap R$ 閉集合の点である。故に $\overline{G_2} \supset \overline{G_2 \cap R}$ から $\varphi(b^*) \notin \overline{G_2 \cap R}$ 是 $\varphi(b^*) \in \cap\overline{G_z}$ に矛盾する。

従って $\varphi(y | y)$ は基 M_z 閉集合で連続なる故 $\varphi(y | y)$ は $\overline{G_z}$ で連続である。$\beta(R)$ で $\varphi(a^*)$ の閉近傍系の基 $\{G_\omega\}$ をとり各 G_ω に対し $G_\omega \supset \overline{N_\omega}$ なる近傍系の基 $\{N_\omega\}$ を選ぶ。a^* の基 $N_\omega \cap R$ 閉集合をとれば $\{\varphi(y) | y\}$ は $\overline{N_\omega \cap R}$ で連続。従って $\overline{N_\omega}$ でも G_ω でも連続である。故に $\varphi_{\mathfrak{F}} \to \varphi(a^*)$ である。故に φ は連続である。

定理2　完全正則空間 R に対し Wallman の bicompactification R^* を作れば R での任意の有界実連続函数は R^* へ拡張出来る。

証明　R での有界実連続函数 f とすれば f は $\beta(R)$ へ拡張出来る。今 R^* の函数 f^* として

$$f^*(a^*) = f(\varphi(a^*)) \qquad a^* \in R^*$$

と定義すれば f^* が求むるものである。